**Corso di Laurea in Fisica, Analisi 1 19-20**
**Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi**
**Esercitazione 4**

**Esercizio 1** Studiare al variare del parametro reale $\alpha$ i limiti delle successioni

$$a_n = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)^n \frac{e^n + 5\ln n}{2^n - n^3 + \sqrt{n}},$$

$$b_n = \frac{n^\alpha \cos(n\pi) + \sin(n^\alpha)\ln^2 n}{n^2+5}$$

**Esercizio 2** Sia $a_n$ una successione limitata che non ha nè massimo nè minimo. Dimostrare che non può essere convergente.

**Esercizio 3** Tenendo conto dei sei seguenti limiti notevoli

$$\lim_n \frac{\sin a_n}{a_n} = 1,\ \lim_n \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1,\ \lim_n \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2},\ \lim(1+a_n)^{1/a_n} = e \qquad \text{per } a_n \to 0,$$

si calcolino i limiti delle seguenti successioni

$$\left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n},\quad \left(2+\frac{1}{n}\right)^n,\quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2},$$

$$\left(\frac{n+\sqrt{n}+3}{n}\right)^n,\quad \left(1-\frac{3}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{n\sqrt{n}}{n+1}},\quad \frac{\sqrt{n+1}}{n}\sin(n!),$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n},\quad \frac{e^{\cos(1/n)-1}-\cos(1/n)}{\sin^2(1/n)},\quad \frac{\cos(n+1)\sin(1/n)}{n^3+n}$$

**Esercizio 4** Siano $a_n$, $b_n$ due successioni tali che

- $\lim_n a_n = 1$
- $|b_n| < 1$ per ogni $n$

dimostrare o confutare le seguenti affermazioni

- $\lim_n a_n + b_n = 2$
- $\lim_n \frac{n\,a_n + b_n}{n+2} = 1$
- esiste $N$ tale che $2\,a_n + b_n > 0$ per ogni $n > N$
- esiste $N$ tale che $2\,a_n - b_n > 0$ per ogni $n > N$

**Esercizio 5** Se una successione $a_n$ è di Cauchy allora

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists N/\ n > N \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| < \varepsilon.$$

Dimostrare che il viceversa non è vero.

**Esercizio 6** Dire se le seguenti serie convergono e, in caso affermativo, calcolarne la somma

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{2^k},\quad \sum_{k=1}^\infty 3^k,\quad \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)},\quad \sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k(1-k)},\quad \sum_{k=0}^\infty \frac{3+(-1)^n 2^n}{6^n}$$

**Esercizio 7** Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

**Esercizio 8** Dimostrare che se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergono allora convergono anche le serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ per ogni $c \in \mathbb{R}$ e valgono le seguenti uguaglianze

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

**Esercizio 9** Due successioni $x_n$, $y_n$ si dicono asintoticamente equivalenti, in simboli $x_n \approx y_n$, se $\lim_n \frac{x_n}{y_n} = 1$

1. $x_n \approx y_n \Rightarrow \lim x_n - y_n = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $x_n \approx y_n \Rightarrow x_n + z_n \approx y_n + z_n$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $x_n - y_n \to 0 \Rightarrow x_n \approx y_n$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. $x_n \approx y_n \Rightarrow e^{x_n} \approx e^{y_n}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

**Esercizio 10** Per qualsiasi numero reale $x$, la intera parte di $x$, denotata con $[x]$, è definita come

$$[x] = \max\{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}.$$

1. se $x_n$ è convergente, allora è convergente anche $[x_n]$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. se $[x_n]$ è convergente, allora è convergente anche $x_n$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. se $x_n$ è divergente (positivamente o negativamente), allora è divergente anche $[x_n]$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se $[x_n]$ è divergente (positivamente o negativamente), allora è divergente anche $x_n$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

**Esercizio 11** Sia $s_n$ una successione tale che

$$\lim_n \frac{s_n - 1}{s_n + 1} = l$$

per $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

1. se $l = 1$ allora $s_n$ ammette limite $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. se $l = 0$ allora $s_n \to 0$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $l$ deve essere finito $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se $l = 1$ allora $s_n$ ammette un'estratta convergente. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

**Esercizio 12**

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ se $a_n \to s$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ è convergente se e solo se $a_n \to 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=100}^{\infty} a_n$ hanno lo stesso carattere. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$
4. se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n$ è convergente allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sono convergenti, $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$